

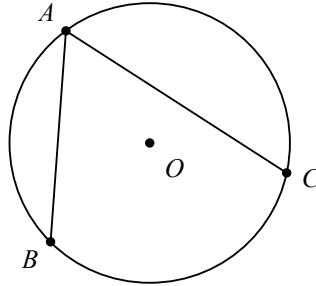
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong gọi là cung bị chắn.



2. Định lý: Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

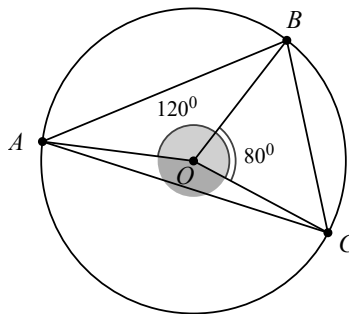
3. Hệ quả: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho các điểm như hình vẽ. Tính số đo các góc của tam giác ABC , biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 80^\circ$.



Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC

$$\text{nên } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

Vì góc nội tiếp $\widehat{ACB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

Xét tam giác ABC , ta có:

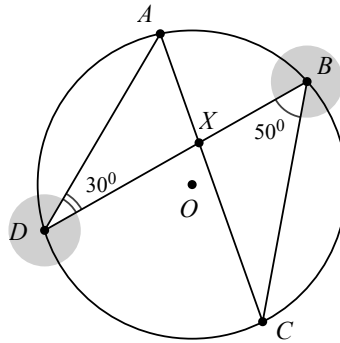
$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB})$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ)$$

$$\widehat{ABC} = 80^\circ.$$

Bài toán 2. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (hình vẽ). Tính số đo góc AXB , biết rằng $\widehat{ADB} = 30^\circ$ và $\widehat{DBC} = 50^\circ$.

Lời giải



Do hai góc nội tiếp $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBD}$ cùng chắn cung CD nên $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 50^\circ$.

Tương tự $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ACB}$ cùng chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 30^\circ$.

Xét tam giác AXD có: $\widehat{CAD} + \widehat{ADB} + \widehat{AXD} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^\circ - (\widehat{CAD} + \widehat{ADB})$$

$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^\circ - (50^\circ + 30^\circ)$$

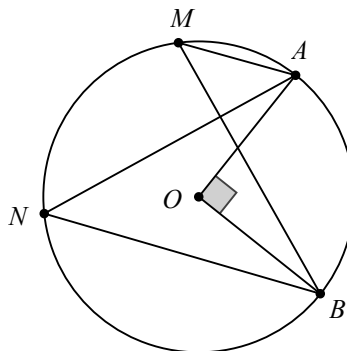
$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 100^\circ.$$

Ta có: $\widehat{AXB} + \widehat{AXD} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^\circ - \widehat{AXD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Bài toán 3. Tính số đo của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ trong hình vẽ.



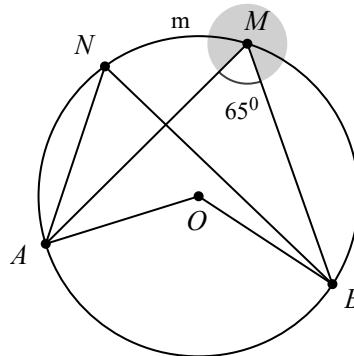
Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{AMB}, \widehat{ANB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Bài toán 4. Tính số đo các góc ANB, AOB và cung lớn AB trong hình vẽ.



Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{ANB}$ và $\widehat{AMB}$ cùng chắn cung nhỏ AB
 nên $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 65^\circ$.

Vì góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB

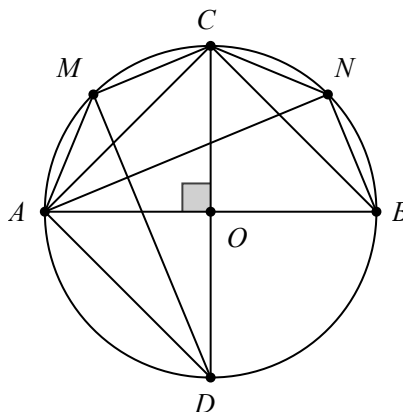
Nên $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$

Số cung nhỏ AB : số $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 130^\circ$ nên số đo cung lớn là: số $\widehat{AmB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

Bài toán 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của nửa đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\widehat{AC}, \widehat{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau (hình vẽ). Tìm số đo các góc sau:

- a) $\widehat{ACB}, \widehat{ADC}$;
 b) $\widehat{ADM}, \widehat{NCB}$.

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có:

- a) $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì góc nội tiếp $\widehat{ADC}$ và góc ở tâm $\widehat{AOC}$ cùng chắn cung nhỏ AC

$$\text{nên } \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

b) Vì M, N lần lượt chia hai cung AC và BC thành hai cung nhỏ có số đo bằng nhau nên: số

$$\widehat{AM} = \text{sđ } \widehat{CM} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

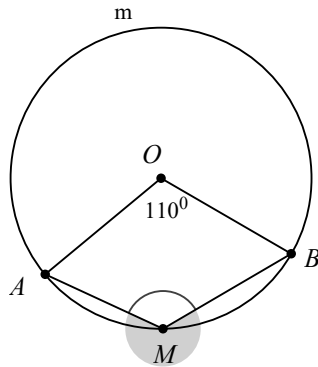
$$\text{Tương tự sđ } \widehat{CN} = \text{sđ } \widehat{BN} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC} = 45^\circ$$

$$\widehat{ADM} = \frac{1}{2} \cdot \text{sđ } \widehat{AM} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{NCB} = \text{sđ } \widehat{BN} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

Bài toán 6. Tính số đo góc AMB (xem hình vẽ).

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có:

$\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn AB .

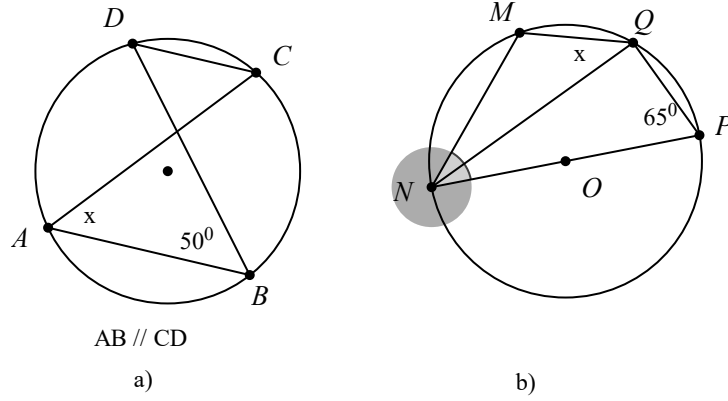
$$\text{nên } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AmB} \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

$$= \frac{1}{2} (360^\circ - \text{sđ } \widehat{AMB})$$

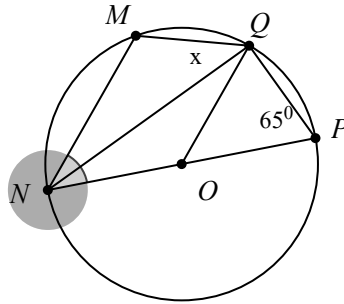
$$= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AOB})$$

$$= \frac{1}{2} (360^\circ - 110^\circ) = 125^\circ.$$

Bài toán 7. Tính số đo x trong mỗi trường hợp ở hình.



Lời giải



Xét hình a), ta có: $AB \parallel CD$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{B} = 50^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

Xét đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BDC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 50^\circ$ hay $x = 50^\circ$.

Xét hình b), (xem hình vẽ)

Nối O với Q , xét tam giác NQP có: $OQ = ON = OP$ hay $OQ = \frac{1}{2}NP$

Do đó tam giác NQP vuông tại Q hay $\angle NQP = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{PNQ} = 90^\circ - \widehat{NPQ} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

Mà $\widehat{MNQ} = \widehat{PNQ} = 25^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{MQ} = 50^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

Ta có $\widehat{NPQ}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{QMN}$ mà $\widehat{NPQ} = 65^\circ$

$$\widehat{QMN} = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

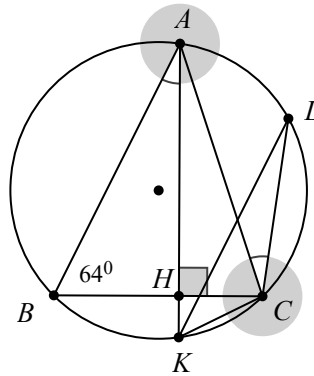
$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{MN} = 130^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{MN} = 40^\circ$$

Bài toán 8. Ba điểm A, B, C thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABC} = 64^\circ$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC và AH cắt đường tròn (O) tại K .

- a) Tính $\widehat{AKC}, \widehat{BAK}$;
 b) Gọi KL là một dây cung song song với dây AB . Tính $\widehat{ACL}$.

Lời giải

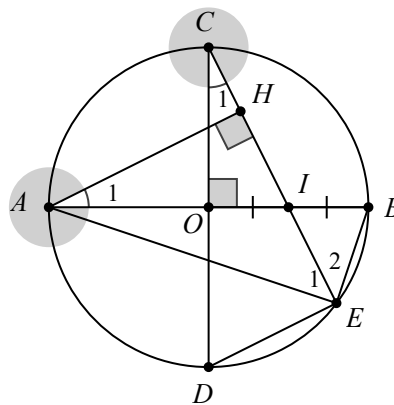


- a) Ta có: $\widehat{AKC} = \widehat{ABC} = 64^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).
 Tam giác AHB vuông tại H (gt) có $\widehat{ABC} = 64^\circ$ (gt)
 $\Rightarrow \widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK).
 b) Ta có: $\widehat{ACL} = \widehat{AKL}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung AL).
 mà $KL \parallel AB \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{BAL}$ (2) (cặp góc so le trong)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACL} = \widehat{BAK} = 26^\circ$

Bài toán 9. AB và CE là hai đường kính vuông góc của đường tròn $(O; R)$. Kẻ dây CE qua trung điểm I của OB . AE cắt CD ở F .

- a) Tính độ dài DF .
 b) Kẻ đường cao AH của tam giác ACE . Tính diện tích tam giác ACE .

Lời giải



- a) I là trung điểm của $OB \Rightarrow IO = IB = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$
 $\Rightarrow AI = AO + OI = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R}{2}} = 3$
 Lại có $AB \perp CD$ tại O (gt) $\Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$
 $\triangle AEB$ có EI là phân giác ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{IA}{IB} = 3$
 Dễ thấy $\triangle AOF \sim \triangle AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OF} = \frac{EA}{EB} = 3 \Rightarrow OF = \frac{OA}{3} = \frac{R}{3} \Rightarrow FD = \frac{2R}{3}$$

b) Xét tam giác vuông COI theo định lý Pythagore ta có:

$$CI^2 = CO^2 + OI^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos C_1 = \frac{OC}{CI} = \frac{R}{\frac{R\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{I_1} \text{)} \Rightarrow \cos A_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AHI \text{ ta có } AH = AI \cos A_1 = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$$

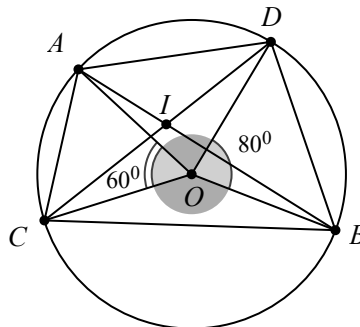
$\triangle CED$ vuông tại E (CD là đường kính)

$$\text{Ta có } CE = CD \cdot \cos C_1 = 2R \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } S_{ACE} = \frac{1}{2} CE \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{4R\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3R\sqrt{5}}{5} = \frac{6R^2}{5}$$

II. Chứng minh

Bài toán 10. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (Hình vẽ)



a) Biết rằng $\widehat{AOC} = 60^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$. Tính số đo của góc AID .

b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)

Xét đường tròn (O) . Nối B với C ta có góc nội tiếp $\widehat{ABC}$ và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ

$$AC \text{ nên } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Tương tự với góc nội tiếp $\widehat{BCD}$ và góc ở tâm $\widehat{BOD}$.

$$\text{Ta có: } \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ.$$

Xét tam giác BIC , ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{BCD} + \widehat{ABC})$$

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ)$$

$$\widehat{BIC} = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIC} = 110^\circ \text{ (đối đỉnh)}$$

b) Nối A với C, B với D.

Xét tam giác AIC và tam giác BID có $\widehat{CAB}$ và $\widehat{CDB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (*)

Tương tự $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AD nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (**)

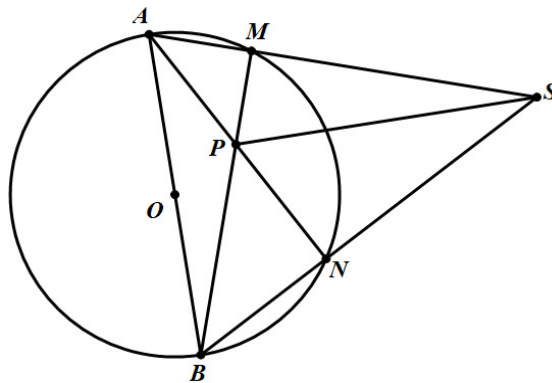
Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle AIC \sim \triangle DBI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$$

$$\Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 11. Cho đường tròn (O), đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O). Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (hình vẽ). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB.

Lời giải



a) (Xem hình vẽ).

Nối O với M, O với N

$$\text{Ta có } OM = OA = OB \text{ hay } OM = \frac{1}{2} AB$$

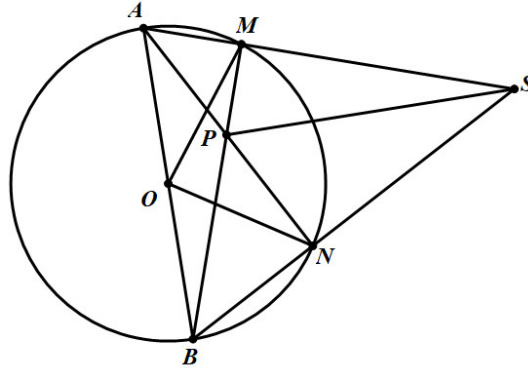
Chứng minh tương tự, ta có tam giác ABN vuông tại N $\Rightarrow AN \perp SB$ hay BM và AN là hai đường cao của tam giác SAB. Mà SA và SB cắt nhau tại P nên P là trực tâm của tam giác SAB $\Rightarrow SP \perp AB$. (đpcm).

Bài toán 12. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy D trên cạnh BC, AD cắt cung BC ở E. Chứng minh rằng.

$$\text{a) } \widehat{AEC} > \widehat{AEB};$$

$$\text{b) } AB \cdot CD = AD \cdot CE$$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$) và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$) mà $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (vì $AB < AC$)

Do đó $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{DEC}$ (cmt) $\widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$)

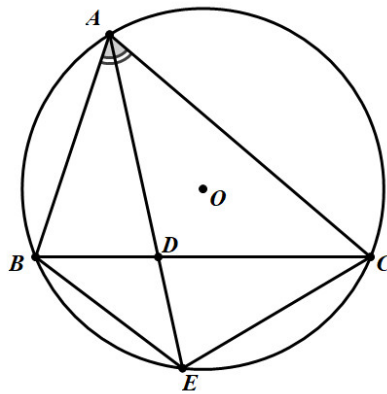
Vậy $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot CE$ (đpcm).

Bài toán 13. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở E . Chứng minh rằng:

a) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$;

b) $BE^2 = AE \cdot DE$.

Lời giải



a) Ta có AE là phân giác của góc A nên $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE}$

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$

(góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g)

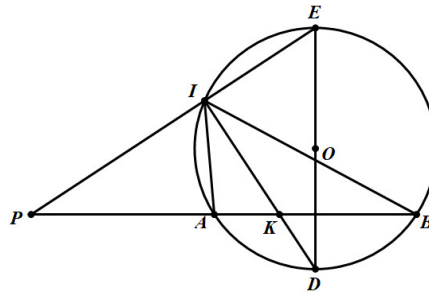
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

b) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BDE$ có: $\widehat{AEB}$ chung, $\widehat{BAE} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau $\widehat{BE} = \widehat{CE}$).

$$\text{Do đó } \triangle ABE \sim \triangle BDE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot DE.$$

Bài toán 14. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến PAB. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB. Kẻ đường kính DE, PE cắt (O) tại I, ID cắt AB tại K. Chứng minh rằng: $PA.KB = PB.KA$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{DA} = \widehat{DB} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BID}$ hay IK là phân giác của $\triangle AIB$.

Khi đó: $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB} \quad (1)$

Mặt khác $\widehat{EID} = 90^\circ$ (ED là đường kính) $\Rightarrow PI \perp KI$

Do đó PI là phân giác góc ngoài của $\triangle AIB$.

Ta có: $\frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IB}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{KA}{KB}$

$\Rightarrow PA.KB = PB.KA$

Nhân xét: Khi cát tuyến PAB trở thành đường kính và dây DE vuông góc với AB (ED không là đường kính). Ta có bài toán tương tự sau:

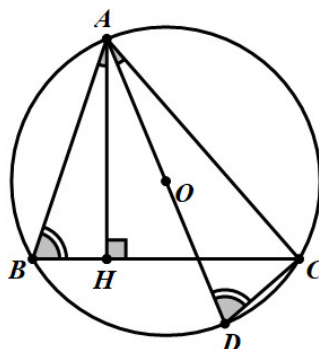
"Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây ED (không qua tâm O) vuông góc với AB.

Gọi M là điểm bất kì thuộc (O) và ME không song song với AB và K là giao điểm của MD với AB. P là giao điểm của tia ME với đường thẳng AB. Chứng minh rằng: $PB.KA = PA.KB$.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ MA, MB lần lượt là phân giác trong, ngoài của $\triangle MPK$.

Bài toán 15. Đỉnh A của tam giác ABC với các góc nhọn được nối với tâm O của đường tròn ngoại tiếp. Từ A vẽ đường cao AH. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Kéo dài AO về phía O ta được đường kính AD.

Ta có: $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

(cùng chắn cung nhỏ AC).

Mặt khác $AC \perp CD$ (vì $\widehat{ACD}$ chắn cung nửa đường tròn) hay $\triangle ACD$ vuông tại C và $\triangle AHB$ vuông (giả thiết). Có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

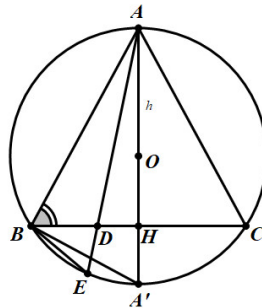
suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BAH}$ hay $\widehat{OAC} = \widehat{BAF}$

Bài toán 16. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O; R), qua A kẻ đường thẳng cắt cạnh BC tại D và cắt (O) tại E.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.

b) Chứng tỏ tích $AD \cdot AE$ không đổi (không phụ thuộc vào vị trí điểm E) hãy tính tích $AD \cdot AE$ theo R và đường cao h của tam giác kẻ từ A.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (góc nội tiếp chắn cung bằng nhau $\widehat{AB} = \widehat{AC}$)

Do đó hai tam giác ADB và ABE đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$$

b) $AD \cdot AE = AB^2$, không đổi.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của AA' và BC ta có AH là đường cao của $\triangle ABC$.

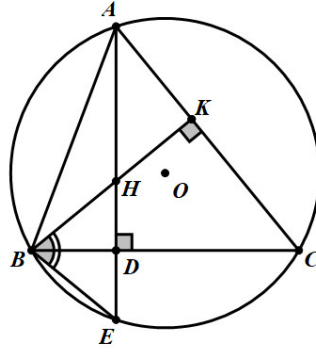
Xét tam giác vuông ABA' có đường cao BH. Áp dụng hệ thức $b^2 = a \cdot b'$ ta có $AB^2 = AA' \cdot AH = 2R \cdot h$ (không đổi).

Bài toán 17. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao AD, BK cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{HBE}$.

b) Chứng minh E đối xứng với H qua BC.

Lời giải



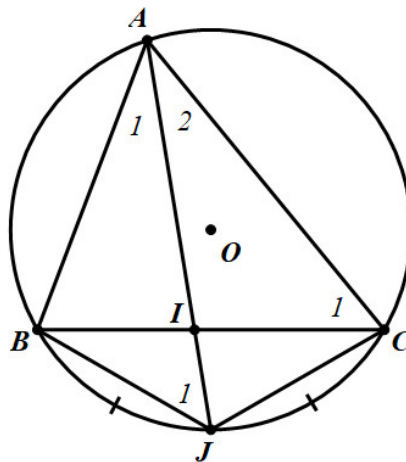
- a) Ta có: $\widehat{CBK} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\hat{C}$)
 $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CE}$)
 $\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{CBE}$

Chúng tỏ BC là phân giác của $\widehat{HBE}$.

- b) $\triangle HBE$ có đường cao BD đồng thời là đường phân giác (cmt). Do đó BD cũng là đường trung trực của đoạn HE hay E và H đối xứng nhau qua BC.

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi J là điểm chính giữa của cung nhỏ BC và I là giao điểm của AJ với BC. Chứng minh rằng: $AI^2 = AB \cdot AC - IB \cdot IC$.

Lời giải



J là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow \widehat{JB} = \widehat{JC}$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle ABJ \sim \triangle AIC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AJ}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AI \cdot AJ \quad (1)$$

Ta lại có: $\widehat{J_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

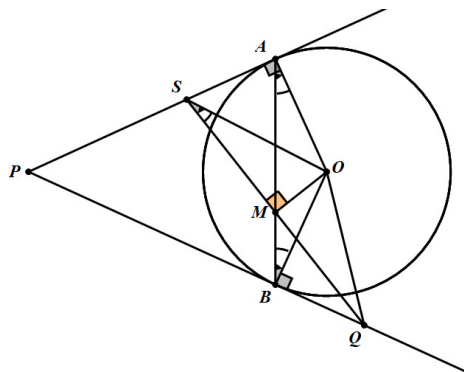
Do đó $\triangle BIJ \sim \triangle AIC$ (g.g)

$$\Rightarrow IB \cdot IC = AI \cdot IJ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot AC - IB \cdot IC = AI(AJ - IJ) = AI^2$$

Bài toán 19. Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến PA, PB đến (O) (A, B, là hai tiếp điểm). Trên dây AB lấy M bất kì. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt PA tại S và PB tại Q. Chứng minh rằng: $MS = MQ$.

Lời giải



Ta có $PA \perp OA$ hay $SA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{\text{SAO}} = 90^\circ$$

nên A thuộc đường tròn đường kính SO.

$$\text{OM} \perp \text{SQ}(\text{gt}) \Rightarrow \widehat{\text{SMO}} = 90^\circ$$

nên M thuộc đường tròn đường kính SO .

Do đó bốn điểm A, O, M, S cùng nằm trên một đường tròn.

Nội SO ta có $\widehat{\text{MSO}} = \widehat{\text{MAO}}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{\text{MO}}$).

Dễ thấy tứ giác OMBQ nội tiếp ($\widehat{OMQ} = \widehat{OPQ} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{MQO} \text{ (2) (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{MO} \text{)}.$$

Lại có $\triangle AOB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ (3)

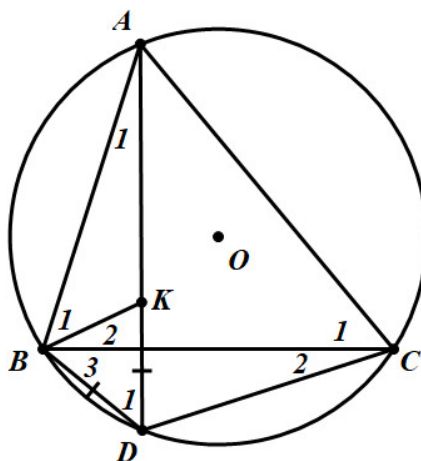
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{MSO} = \widehat{MQO}$ hay ΔSOQ cân tại O có OM là đường cao nên OM cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow SM = QM$.

Bài toán 20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC . Trên đoạn DA lấy $DK = DB$.

a) Chứng tỏ $\triangle BDK$ đều.

b) Chứng tỏ: $AD = BD + CD$.

Lời giải



a) $\triangle BDK$ cân ($DB = DK$) có $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$). Vậy $\triangle BDK$ đều.

b) $\triangle BDK$ đều (cmt) $\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{B}_3 = 60^\circ$ mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$.

Lại có: $BK = BD = DK$ (cmt)

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle CDB$ có:

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 \text{ (cmt)}$$

$$AB = CB \text{ (gt)}$$

và $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

Vậy $\triangle AKB = \triangle CDB$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AK = DC \text{ mà } AD = AK + KD \Rightarrow AD = BD + CD$$

c) Xét ba điểm B, D, C có: $DB + DC \geq BC \Rightarrow 2(DB + DC) \geq 2BC$

mà $DB + DC = DA \Rightarrow DA + DB + DC \geq 2BC$ (không đổi)

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow D$ trùng B hoặc C .

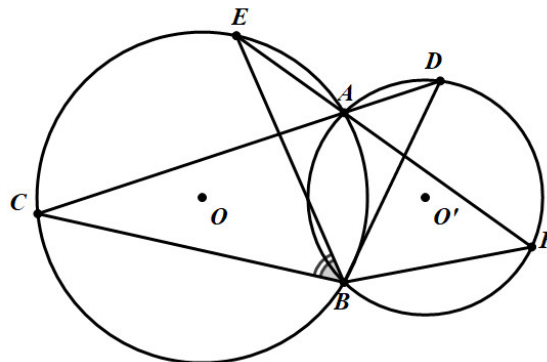
Vậy khi D trùng B hoặc trùng C thì $DA + DB + DC$ nhỏ nhất:

Bài toán 21. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E thuộc (O) , D và F thuộc (O')). Chứng minh rằng:

a) $BC \cdot BF = BD \cdot BE$.

b) $\triangle BCE$ và $\triangle BDF$ đồng dạng.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\widehat{BDA} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$).

Do đó $\triangle BCD \sim \triangle BEF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow BC \cdot BF = BD \cdot BE$$

b) Theo chứng minh câu a: $\triangle BCD \sim \triangle BEF$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$$

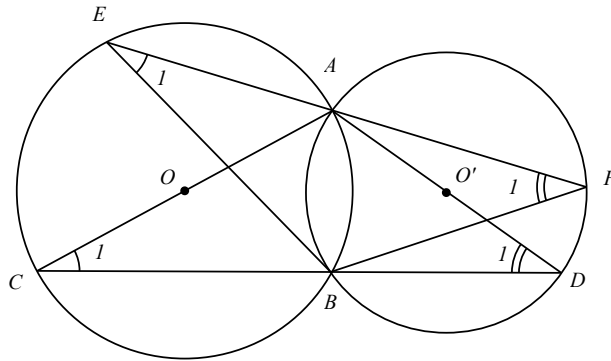
$$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{FBD}.$$

Bài toán 22. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn.

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Một cát tuyến qua A cắt (O) tại E và (O') tại F . Chứng minh rằng: $AC.BF = AD.BE$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (AC là đường kính) $\Rightarrow AB \perp CB$

Chứng minh tương tự $AB \perp DB$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Có $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

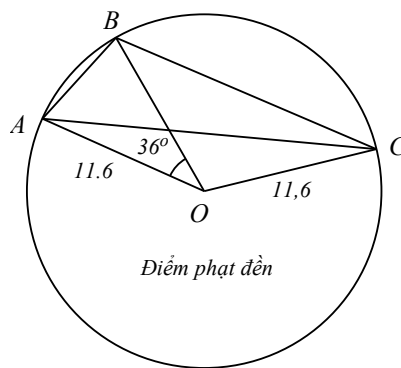
$\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó, $\triangle ACD \sim \triangle BEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BF} \Rightarrow AC.BF = AD.BE$.

III. Toán thực tế

Bài toán 23. Trên sân bóng, khi trái được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 30° và trái bóng cách mỗi cọc gôn 11,6m. Hỏi khi trái bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền 11,6m thì góc sút bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi A, B là chân hai cọc gôn và O là điểm phạt đền.

Ta có $OA = OB = OC = 11,6$ m

Vậy A, B, C nằm trên đường tròn tâm O bán kính 11,6 m và góc ở tâm $\widehat{AOB} = 36^\circ$

Do đó, góc nội tiếp $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Vậy góc sút bằng 18°

HẾT

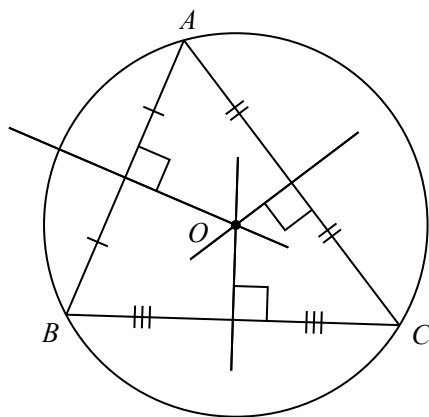
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tròn ngoại tiếp một tam giác

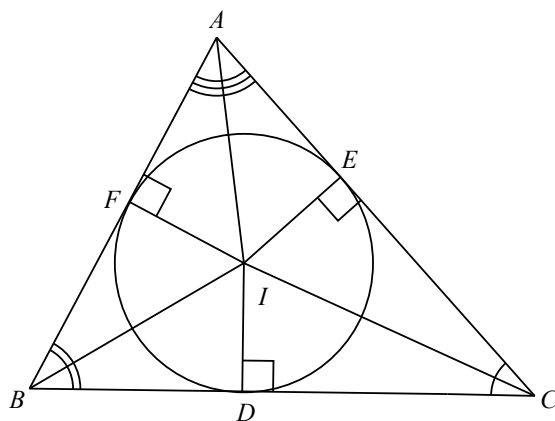
Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó tam giác gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.



- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác.
- Bán kính là khoảng cách từ giao điểm của ba đường trung trực đến một điểm bất kì của tam giác.

2. Đường tròn nội tiếp một tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó tam giác được gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.



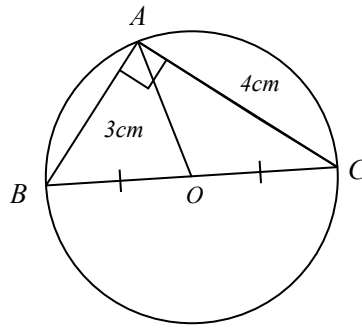
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác trong.
- Bán kính bằng khoảng cách từ giao điểm đó đến một cạnh bất kì của tam giác.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải



Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC . Ta có AO là trung tuyến của tam giác vuông ABC nên $OA = \frac{1}{2}BC = OB = OC$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn có tâm O là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Pythagore, ta có:

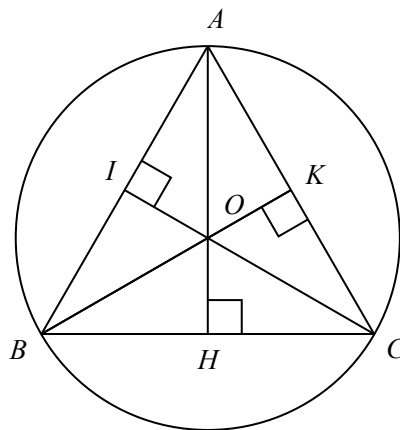
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$$

Vậy bán kính của đường tròn là $5 : 2 = 2,5(\text{cm})$

Bài toán 2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đều ABC thì O đồng thời là trọng tâm và trực tâm của tam giác.

Ta có $OA = OB = OC = \frac{2}{3}AH$ (H là chân đường cao kẻ từ A)

Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Mặt khác, xét tam giác AHB vuông tại H .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (Tính chất trọng tâm)}$$

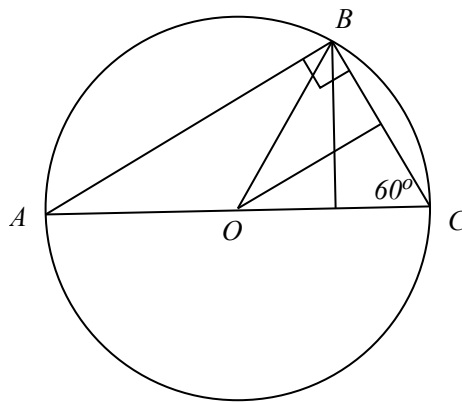
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm tam giác và có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$, $BC = 3\text{ cm}$ và O là trung điểm AC . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của

a) $\triangle ABC$;

b) $\triangle BCD$.

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là nửa tam giác đều.

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2BC = 2 \cdot 3 = 6(\text{cm})$$

Theo bài toán 1 ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$ và tâm O là trung điểm của cạnh huyền AC .

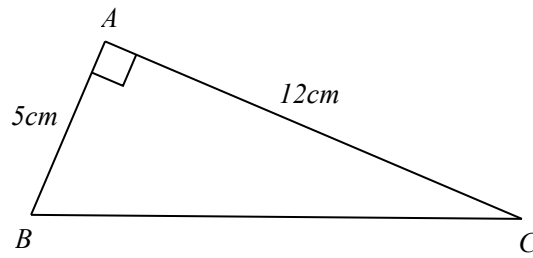
b) Dễ thấy tam giác BCD đều (Theo bài toán 2)

Gọi I là trọng tâm của tam giác đều BCD , ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp vì cạnh của tam giác đều BCD là $3(\text{cm})$ nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD là

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \text{ (Xem lời giải bài toán 2)}$$

Bài toán 4. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$

Lời giải:



Tam giác ABC vuông tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

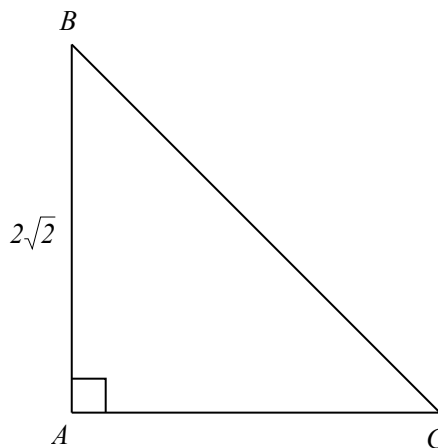
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{169} = 13(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A là: $\frac{BC}{2} = \frac{13}{2}(\text{cm})$ (nửa cạnh huyền BC)

Bài toán 5. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng $\triangle ABC$ vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2}$ cm.

Lời giải



(Xem hình vẽ)

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

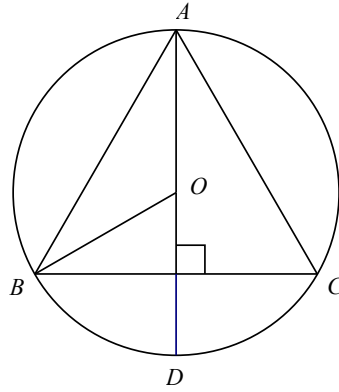
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A có độ dài bằng nửa cạnh huyền BC tức là 2(cm).

Bài toán 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Kẻ đường cao AH vì tam giác ABC đều (gt) nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc BAC , ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại D . Khi đó $\widehat{BOD}$ và $\widehat{BAD}$ lần lượt là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $(\widehat{BD}) \Rightarrow \widehat{BOD} = 2.\widehat{BAD} = 2.30^\circ = 60^\circ$.

Tam giác BHO vuông tại H có cạnh huyền $OB = 3\text{ cm}$ (gt) và $\widehat{BOD} = 60^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = OB.\sin BOH = 3.\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

Vì $\triangle ABC$ đều nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến hay H là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow BC = 2BH = 2.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền: $AB = BC = 3\sqrt{3}$ (cm) và $\widehat{BAH} = 30^\circ$ (cmt)

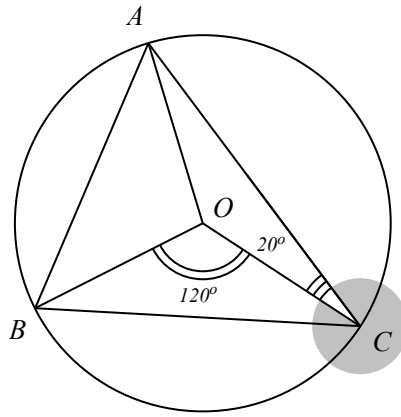
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AB.\cos BAH = 3\sqrt{3}.\cos 30^\circ = \frac{9}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{Gọi } S_{ABC} \text{ là diện tích tam giác đều, ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.\frac{9}{2}.3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$ và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{BC}$. nên

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Tam giác $\widehat{BOC}$ cân tại O có góc ở đỉnh $\widehat{BOC} = 120^\circ$ (GT)

$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

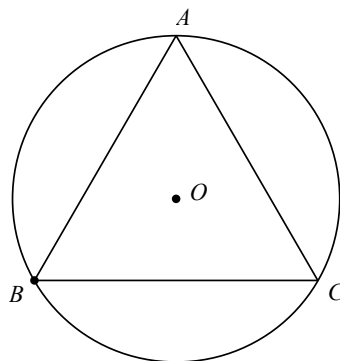
$$\text{Do đó, } \widehat{BCA} = \widehat{OCB} + \widehat{OCA} = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ.$$

Xét tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{BCA}) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ \end{aligned}$$

Vậy số đo các góc của tam giác ABC là: $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$; $\widehat{BCA} = 50^\circ$.

Bài toán 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

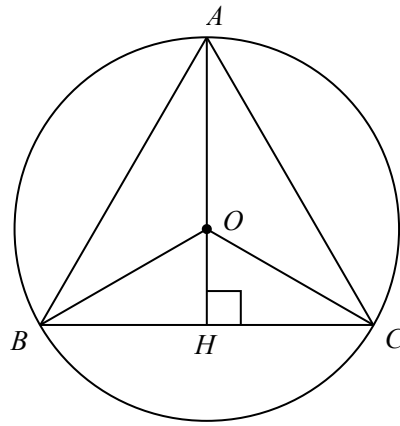


a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

Hướng dẫn: Ngoài cách giải như bài toán 2, chúng ta sẽ có cách khác như sau:

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có

cạnh 3 cm ta có $AH = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (cm)

Vì $\triangle ABC$ đều nên trực tâm O cùng trùng với

trọng tâm, khi đó $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ (cm)

Vậy bán kính R của đường tròn (O) là: $OA = \sqrt{3}$ (cm)

b) Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều ABC cạnh 3 cm, ta có: $S_{ABC} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ (cm²).

Gọi S là diện tích hình tròn (O) ta có:

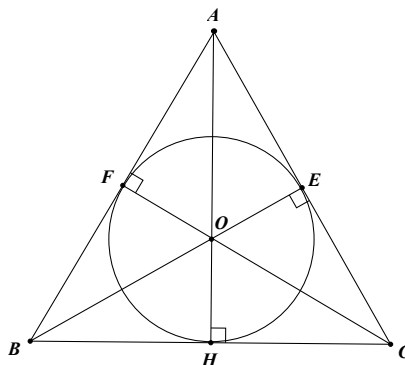
$$S = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC là

$$S_{vp} = \frac{1}{3} \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = 1,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài toán 9. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a .

Lời giải



Ta có tam giác ABC đều.

Gọi O là trực tâm của tam giác đồng thời là giao điểm ba đường phân giác trong.

Vậy O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .

$$\text{Ta có } \widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = a$, $\widehat{BAH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AB \cdot \cos \widehat{BAH} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

(Lưu ý: Có thể kết luận ngay $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vì $\triangle ABC$ đều cạnh a).

Mặt khác tam giác ABC đều nên trực tâm O cũng là trọng tâm, suy ra

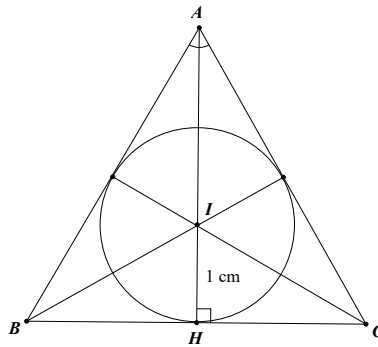
$$OH = \frac{1}{3} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Trong tam giác đều, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng nhau.

Bài toán 10. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1 cm.

Lời giải



I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC nên là giao điểm của ba đường phân giác và I đồng thời là trọng tâm của tam giác đều ABC , khi đó AH là đường trung tuyến.

$$\text{Ta có: } AI = 2IH = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (cm)}$$

$$\text{Suy ra } BI = CI = AI = 2 \text{ (cm)}.$$

Xét tam giác BHI vuông tại H , có cạnh huyền $BI = 2 \text{ (cm)}$, $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BI \cdot \cos \widehat{IBH} = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Suy ra $BC = 2.BH = 2.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$.

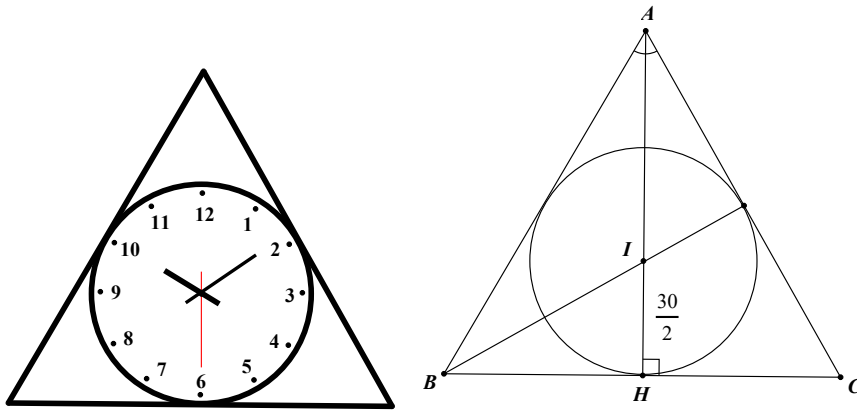
Độ dài các cạnh của tam giác đều ABC ngoại tiếp $(I, 1\text{cm})$ bằng $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

II. Bài toán thực tế

Bài toán 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30cm (Hình vẽ). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn: Giải tương tự bài toán 10.

Lời giải



Ta có bán kính của hình tròn nội tiếp tam giác đều ABC là $\frac{30}{2} = 15(\text{cm})$.

Tam giác ABC đều nên giao điểm I của ba đường phân giác cũng là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường trung tuyến.

Xét tam giác BHI vuông tại H có cạnh huyền $BI = AI = 30\text{ cm}$ và $\widehat{HBI} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

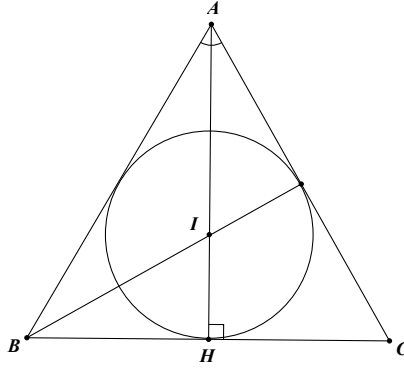
$$BH = BI.\cos \widehat{HBI} = 30.\cos 30^\circ = 15\sqrt{3}(\text{cm})$$

Suy ra $BC = 2.15\sqrt{3} = 30\sqrt{3}(\text{cm})$.

Vậy độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng $30\sqrt{3}\text{ cm}$.

Bài toán 12. Một mảnh vườn có dạng hình tam giác đều ABC cạnh 12m. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .

Kẻ đường cao AH , khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp (giao điểm của ba đường phân giác cũng là trọng tâm).

Ta có AH là đường trung tuyến suy ra H là trung điểm của BC hay

$$BH = CH = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6(\text{m}).$$

Xét tam giác BHI vuông tại H . Có $BH = 6\text{ m}$ và $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$IH = BH \cdot \tan \widehat{IBH} = 6 \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}(\text{m}).$$

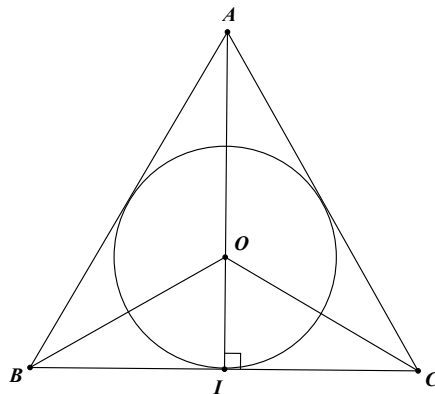
Vậy bán kính của phần đất trồng hoa là $2\sqrt{3}(\text{m})$.

Do đó diện tích phần đất trồng hoa là $S = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi (\text{m}^2)$.

Bài toán 13. Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m . Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C .

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi O là vị trí cách đều ba vị trí A, B, C nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (giao điểm của ba đường trung trực).

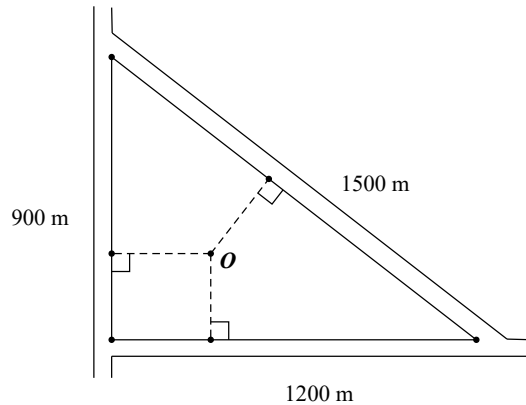
Do $\triangle ABC$ đều (gt) nên O đồng thời là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường cao của tam giác ABC đều cạnh 15m.

Suy ra $AH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ (m) vì AH đồng thời là trung tuyến của $\triangle ABC$ có trọng tâm O suy ra

$$OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C là $5\sqrt{3}$ (m).

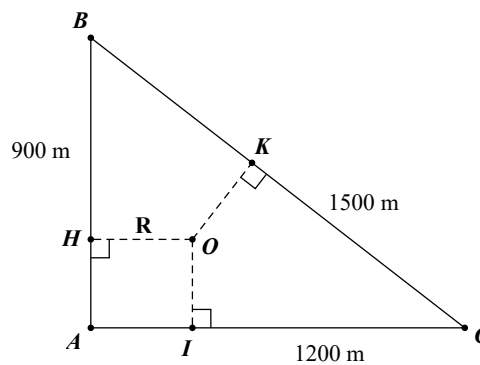
Bài toán 14. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900m, 1200m và 1500m (Hình vẽ).



- Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.
- Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách một con đường một khoảng là bao nhiêu?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



- Tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ($1500^2 = 900^2 + 1200^2$)

Theo định lý Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A .

Phần đất giới hạn là tam giác vuông, gọi P là chu vi, ta có:

$$P = AB + AC + BC = 900 + 1200 + 1500 = 3600 \text{ (m)}$$

$$\text{Và diện tích } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 1200 = 540000 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Gọi O là nơi xây dựng khách sạn và khoảng cách từ khách sạn đến ba con đường là $OH = OI = OK = R$.

Ta có: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$ (trong đó S_{AOB} , S_{AOC} , S_{BOC} lần lượt là diện tích các tam giác AOB , AOC , BOC).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.AB + \frac{1}{2}R.AC + \frac{1}{2}R.BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.(AB + AC + BC)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.P \text{ (} S_{ABC} \text{ là diện tích } \Delta ABC \text{ và } P \text{ là chu vi)}$$

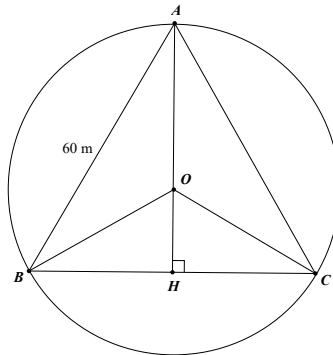
$$\text{Suy ra } R = \frac{2.S_{ABC}}{P} = \frac{2.540000}{3600} = 300 \text{ (m)}.$$

Khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường 300 (m).

Bài toán 15. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m. Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy không?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Kẻ đường cao AH . Vì ΔABC đều nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên H là trung điểm của BC , ta có:

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (m)}$$

Tam giác AHC vuông tại H . Theo định lý Pythagore ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 60^2 + 30^2$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{60^2 + 30^2} = 30\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3}AH \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$$\text{Suy ra } OA = \frac{2}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh 60 m là

$$OA = 20\sqrt{3} \approx 34,6 \text{ (m)} < 50 \text{ (m)}.$$

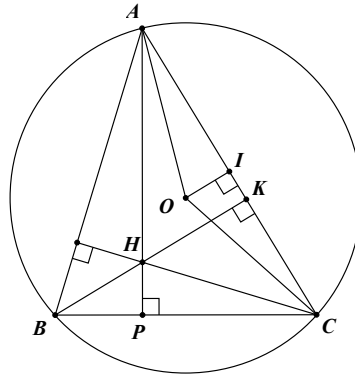
Vậy có thể đặt vị trí bộ phát sóng tại O .

III. Chứng minh

Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi OI là đường cao của tam giác AOC cân tại O , ta có OI đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{AOC}$ hay $\widehat{AOI} = \widehat{COI} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$.

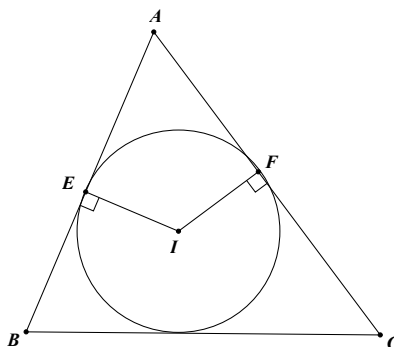
Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{AOI}$.

Hai tam giác APB và AIO đều vuông tại P và I mà $\widehat{ABP} = \widehat{AOI}$ (chứng minh trên)

Nên suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Bài toán 17. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Lời giải



Ta có E, F lần lượt là hai tiếp điểm trên các cạnh AB, AC (gt) suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$.

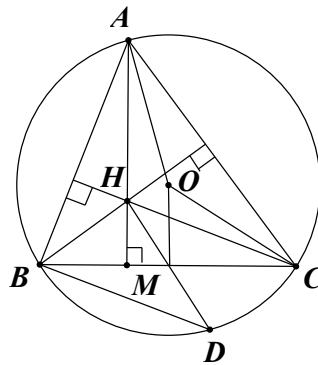
Xét tứ giác $AEIF$ có $\widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 360^\circ - (\widehat{AEI} + \widehat{AFI}) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. (đpcm)

Bài toán 18. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh:

- $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$.
- Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.
- $AC^2 + BH^2 = 4R^2$.
- Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Lời giải



- Xét tam giác ABD , ta có: $OB = OA = OD (= R)$ hay $OB = AD$

Chứng tỏ $\triangle ABD$ vuông tại B

Hay $DB \perp AB$ (đpcm)

Chứng minh tương tự ta có $CD \perp AC$.

- Ta có $BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC)

Tương tự $CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (Các cạnh đối song song)

- Ta có tam giác ACD vuông tại C (chứng minh trên)

$$AC^2 + DC^2 = AD^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\text{Mà } DC = BH \text{ (cmt)} \quad AC^2 + BH^2 = AD^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

- Ta có M là trung điểm của BC (gt) mà tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (cmt) nên đường chéo thứ hai HD phải qua trung điểm M hay ba điểm H, M, D thẳng hàng.

* Xét tam giác AHD có O là trung điểm của AD (gt)

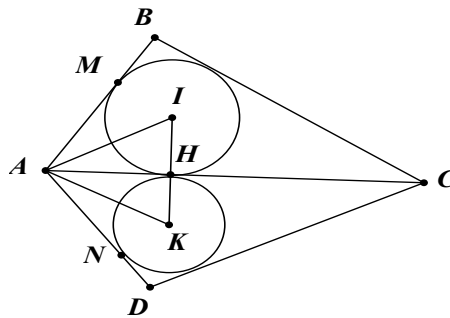
M là trung điểm của HD (cmt) nên OM là đường trung bình của tam giác AHD

$$\Rightarrow AH = 2.OM$$

Bài toán 19. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M , đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

- Ba điểm I, H, K thẳng hàng
- $AM = AN$
- $\widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$

Lời giải



a) Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow IH \perp AC$.

Tương tự đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow KH \perp AC$.

Suy ra ba điểm I, H, K thẳng hàng

b) Ta có: Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M hay AM là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Lại có AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) (cmt)

$AM = AH$ (*) (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chứng minh tương tự, ta có $AH = AN$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AM = AN$

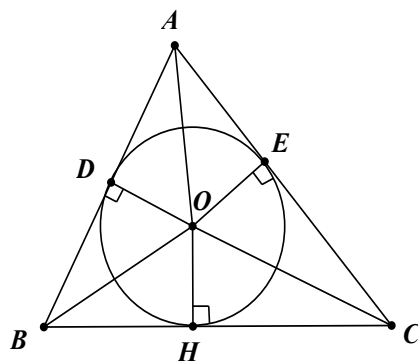
c) Ta có: $\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK}$ mà $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAH}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} \Rightarrow \widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} = \frac{1}{2}(\widehat{MAH} + \widehat{HAN}) = \frac{1}{2}\widehat{MAN} \text{ hay } = \frac{1}{2}\widehat{BAD} \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 20. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$.

Chứng minh rằng $S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB)$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I; r)$ với các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} \\ &= \frac{1}{2} ID \cdot AB + \frac{1}{2} IE \cdot AC + \frac{1}{2} IF \cdot BC \end{aligned}$$

$$\text{Mà } ID = IE = IF = r$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} r (BC + CA + AB) \text{ (đpcm).}$$

☞ HẾT ☞